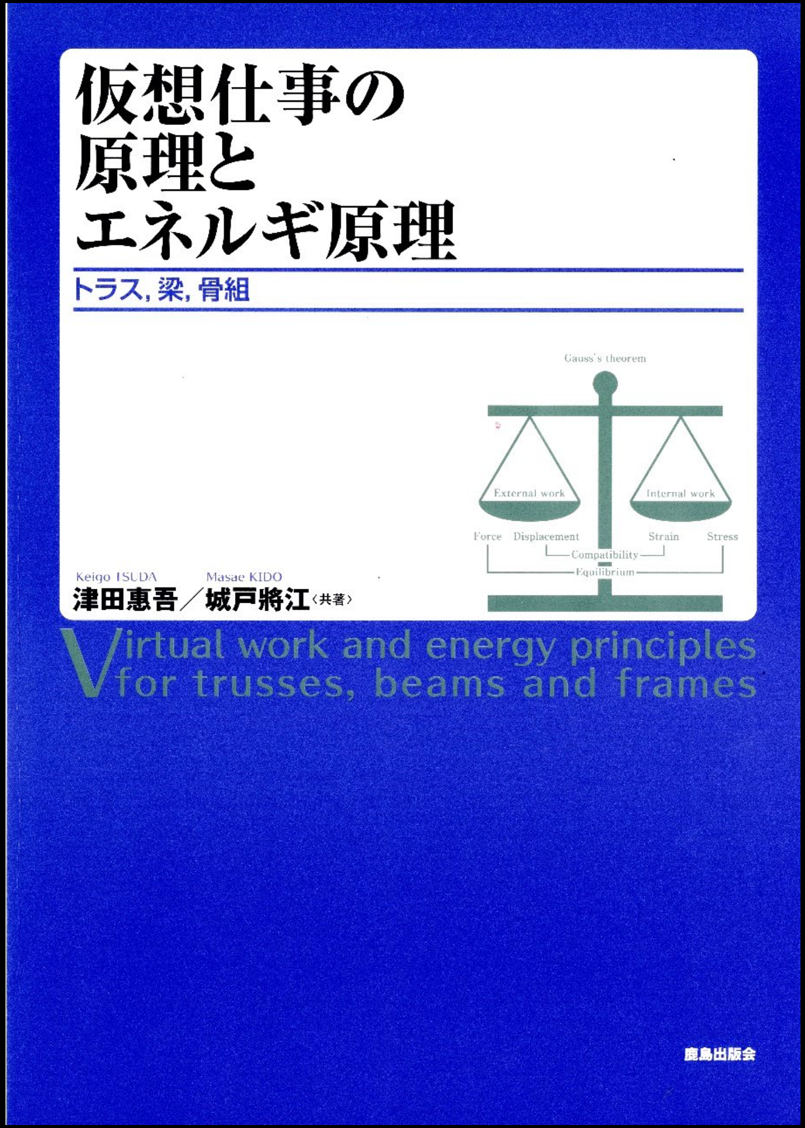
仮想仕事の原理

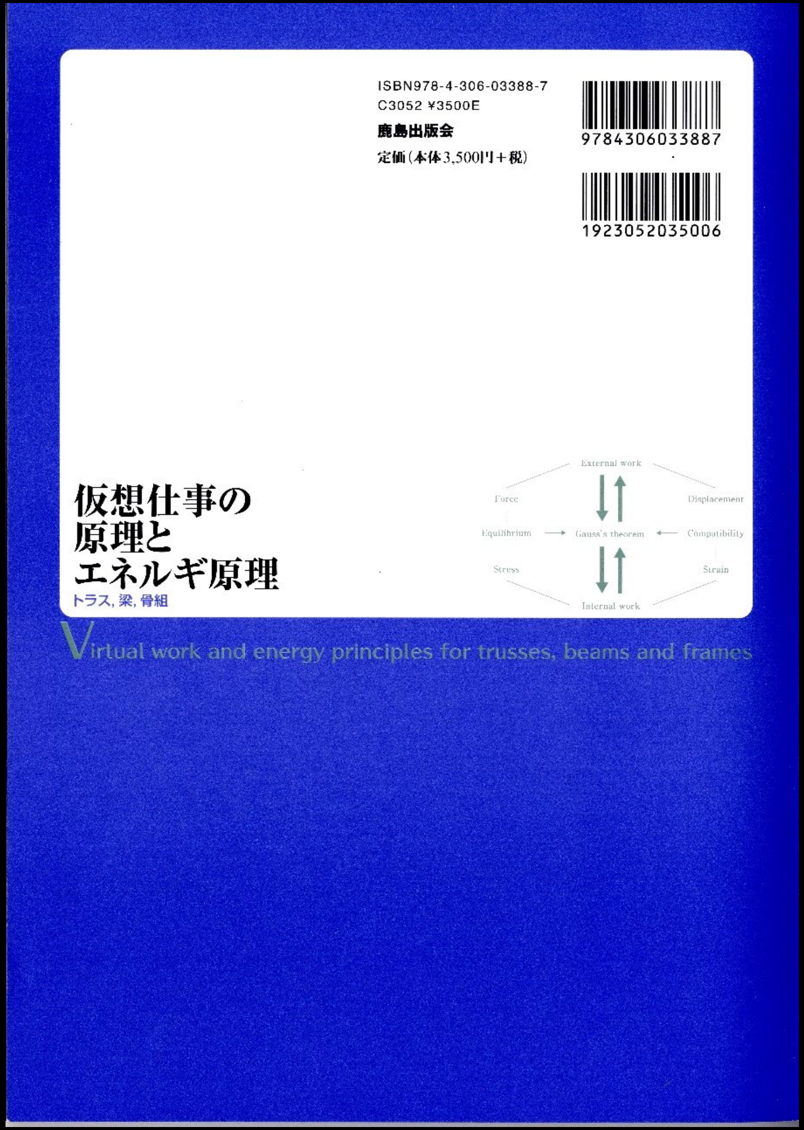
② 構造力学の"構造"
例題

城戸將江・津田惠吾 2021.04

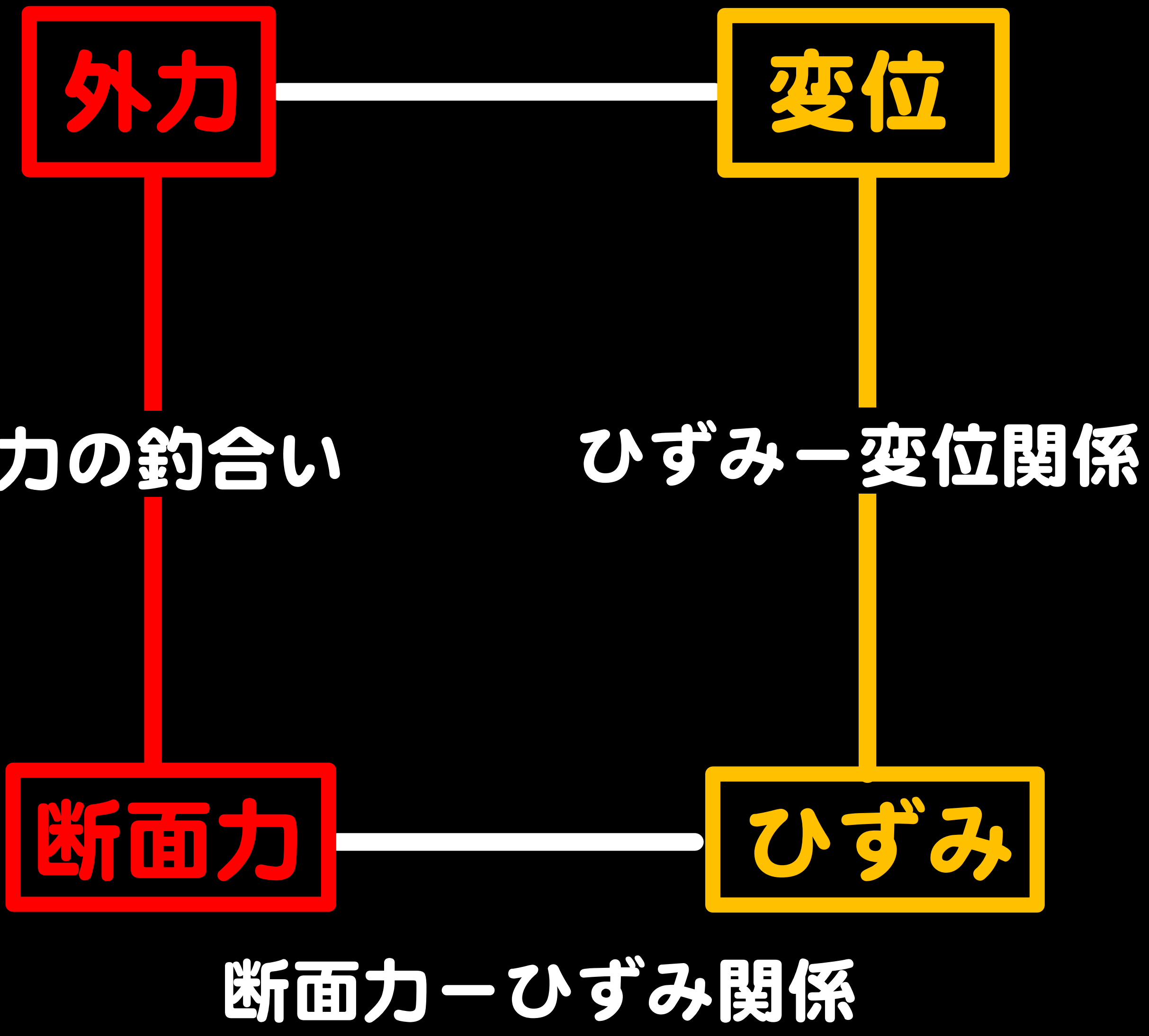
仮想仕事の原理とエネルギ原理 トラス，梁，骨組

鹿島出版会 2019年9月





構造力学の"構造"のまとめ



(1) 力の釣合い

$$\frac{dQ}{dx}=\frac{d^2M(x)}{dx^2}=-w(x)$$

(2) ひずみー変位関係

$$\phi(x)=-v''(x)$$

(3) 断面力ーひずみ関係

$$M(x)=EI\phi(x)=-EIv''(x)$$

(4) 外力ー変位関係

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=w(x)$$

(5) 境界条件

境界条件

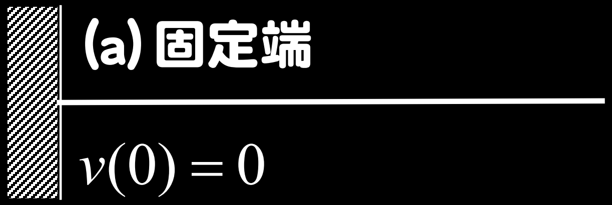
1) 幾何学的境界条件

構造的な支持条件を示した条件

固定端：たわみとたわみ角が0

ピン支点，ローラ支点：たわみが0

(a) 固定端



$v(0)=0$

$v'(0)=0$

(b) ピン支点

$v(0)=0$ $\quad$ $v(l)=0$

2) 力学的境界条件

境界での外力と断面力の釣合い条件

負の向きの$\overline{M}$

$x=0$ $\quad$ $x=l$

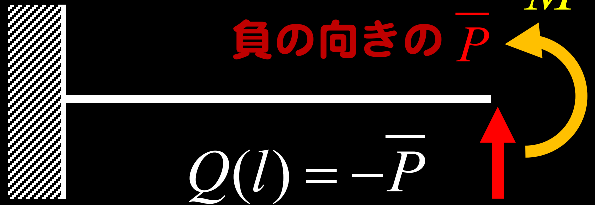
$\overline{M}$

$M(0)=0$ $\quad$ $M(l)=-\overline{M}$

$\rightarrow -EIv''(0)=0 \rightarrow v''(0)=0$ $\quad$ $\rightarrow -EIv''(l)=-\overline{M}$

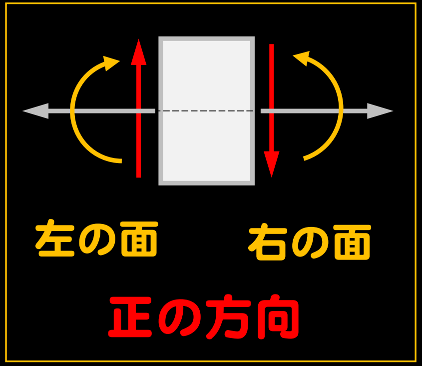
$\overline{M}$

負の向きの $\overline{P}$

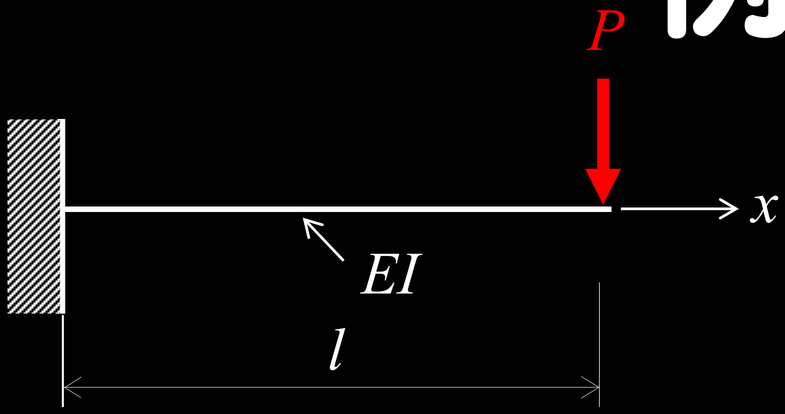


$Q(l)=-\overline{P}$

$M(l)=\overline{M}$ $\quad$ $\overline{P}$



例題1 片持ち梁 1



釣合い式

$$EIv^{\mathrm{IV}}\left(x\right)=0$$

幾何学的境界条件

$$v\left(0\right)=0,\ v'\left(0\right)=0$$

力学的境界条件

$$Q\left(l\right)=P, M\left(l\right)=0$$

→ $$-EIv'''\left(l\right)=P,\quad -EIv''\left(l\right)=0$$

釣合い式を順次積分する

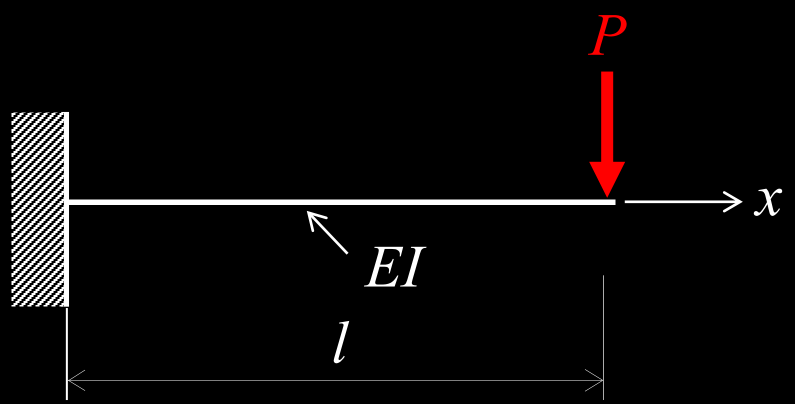
$$EIv^{\mathrm{IV}}\left(x\right)=0$$
$$EIv'''\left(x\right)=C_1$$
$$EIv''\left(x\right)=C_1x+lC_2$$
$$EIv'\left(x\right)=\frac{1}{2}C_1x^2+lC_2x+l^2C_3$$
$$EIv\left(x\right)=\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}lC_2x^2+l^2C_3x+l^3C_4$$

境界条件

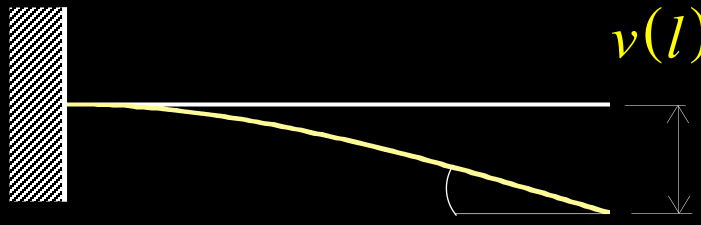
$$\begin{cases} v\left(0\right)=0 & \text{より}\ C_4=0 \\ v'\left(0\right)=0 & \text{より}\ C_3=0 \\ -EIv'''\left(l\right)=P & \text{より}\ -C_1=P \\ -EIv''\left(l\right)=0 & \text{より}\ C_1l+C_2l=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} C_1=-P \\ C_2=P \\ C_3=C_4=0 \end{cases}$$

例題1(続)　片持ち梁 1



$$\begin{cases} v(l) = \dfrac{Pl^3}{3EI} \\ v'(l) = \dfrac{Pl^2}{2EI} \end{cases}$$



$$v(l) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

$$v'(l) = \frac{Pl^2}{2EI}$$

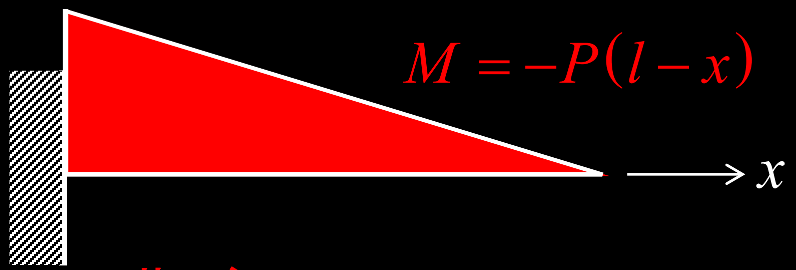
たわみ

$$v(x) = \frac{Pl^3}{6EI}\left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}$$

$$v'(x) = \frac{Pl^2}{2EI}\left\{2\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right\}$$

$$M(x) = -EIv''(x) = -P(l-x)$$

$$Q(x) = -EIv'''(x) = P$$



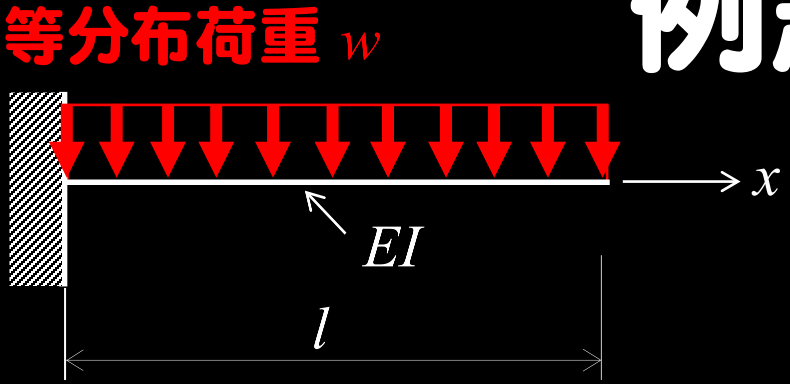
曲げモーメント図

この例題は，静定はりであるので，

$$M(x) = -EIv''(x) = -P(l-x)$$

と境界条件 $v(0)=0$,　$v'(0)=0$ **を用いて計算できる**

例題2 片持ち梁 2



釣合い式

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=w$$

幾何学的境界条件

$$v(0)=0,\ v'(0)=0$$

力学的境界条件

$$Q(l)=0,\ M(l)=0$$

→ $$-EIv'''(l)=0,\quad -EIv''(l)=0$$

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=w$$

$$EIv'''(x)=w(x+lC_1)$$

$$EIv''(x)=w\left(\frac{1}{2}x^2+lC_1x+l^2C_2\right)$$

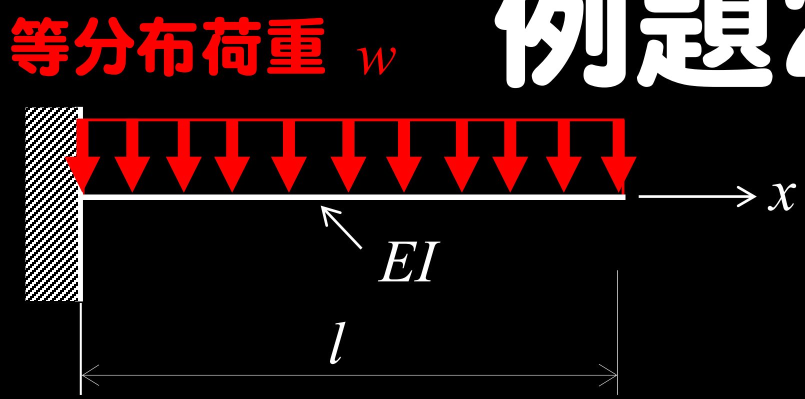
$$EIv'(x)=w\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}lC_1x^2+l^2C_2x+l^3C_3\right)$$

$$EIv(x)=w\left(\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}lC_1x^3+\frac{1}{2}l^2C_2x^2+l^3C_3x+l^4C_4\right)$$

境界条件

$$\begin{cases} v(0)=0 \text{ より } C_4=0 \\ v'(0)=0 \text{ より } C_3=0 \\ -EIv'''(l)=0 \text{ より } C_1=-1 \\ -EIv''(l)=0 \text{ より } C_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

例題2（続） 片持ち梁 2



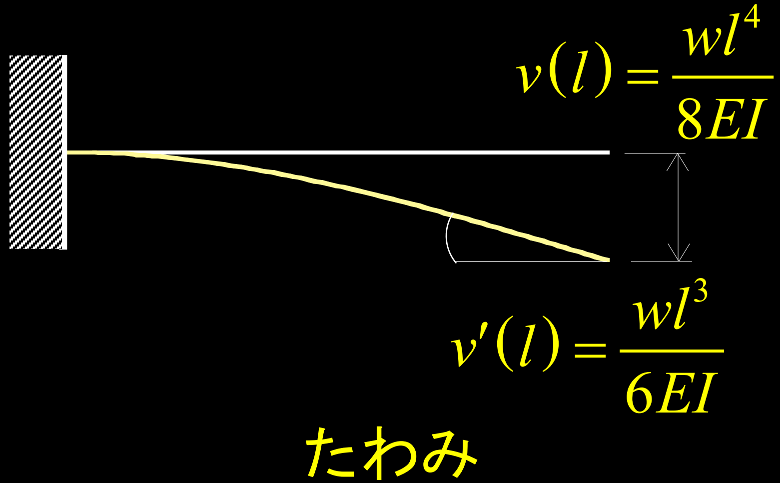
$$v(x)=\frac{wl^4}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^4-4\left(\frac{x}{l}\right)^3+6\left(\frac{x}{l}\right)^2\right\}$$

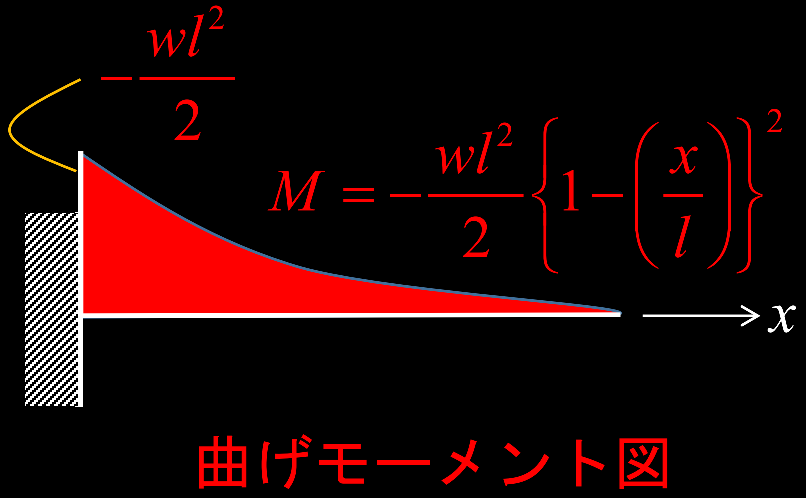
$$v'(x)=\frac{wl^3}{6EI}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+3\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

$$M(x)=-EIv''(x)=-\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2-2\left(\frac{x}{l}\right)+1\right\}$$

$$Q(x)=-EIv'''(x)=wl\left\{1-\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

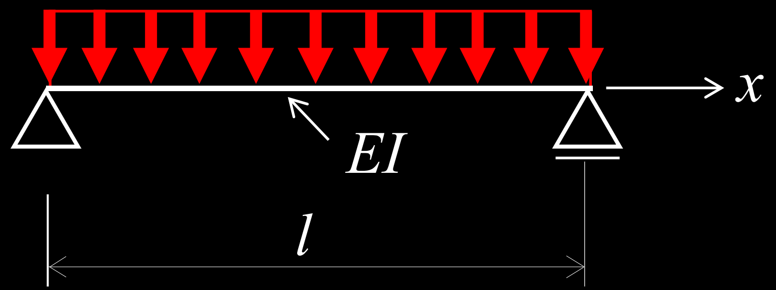
$$\begin{cases} v(l)=\dfrac{wl^4}{8EI} \\ v'(l)=\dfrac{wl^3}{6EI} \end{cases}$$





例題3　単純梁

等分布荷重 w



釣合い式

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=w$$

幾何学的境界条件

$$v(0)=0,\ v(l)=0$$

力学的境界条件

$$M(0)=M(l)=0$$

$$\rightarrow\ -EIv''(0)=-EIv''(l)=0$$

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=w$$

$$EIv'''(x)=w\left(x+lC_1\right)$$

$$EIv''(x)=w\left(\frac{1}{2}x^2+lC_1x+l^2C_2\right)$$

$$EIv'(x)=w\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}lC_1x^2+l^2C_2x+l^3C_3\right)$$

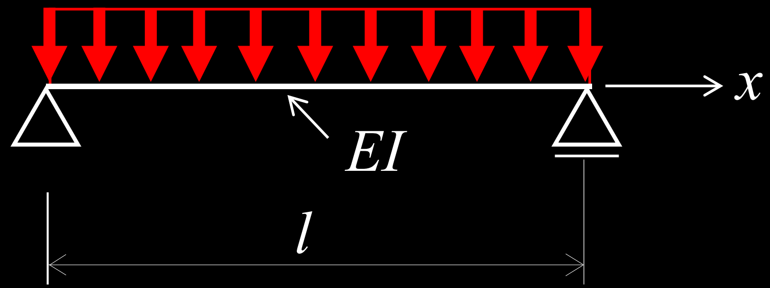
$$EIv(x)=w\left(\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}lC_1x^3+\frac{1}{2}l^2C_2x^2+l^3C_3x+l^4C_4\right)$$

境界条件

$$\begin{cases} v(0)=0 \text{ より } C_4=0 \\ v''(0)=0 \text{ より } C_2=0 \\ v(l)=0 \text{ より } \dfrac{1}{24}l^4+\dfrac{1}{6}l^4C_1+l^4C_3=0 \\ v''(l)=0 \text{ より } \dfrac{1}{2}l^2+l^2C_1+l^2C_2=0 \end{cases}$$

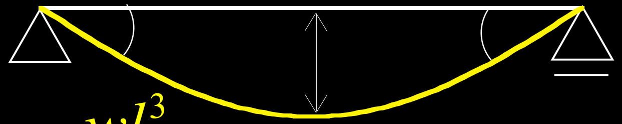
例題3（続） 単純梁

等分布荷重 w



$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{2}, C_2 = 0, \\ C_3 = \dfrac{1}{24}, C_4 = 0 \end{cases}$$

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5wl^4}{384EI}$$



$$v'(0) = \frac{wl^3}{24EI} \qquad v'(l) = -\frac{wl^3}{24EI}$$

たわみ

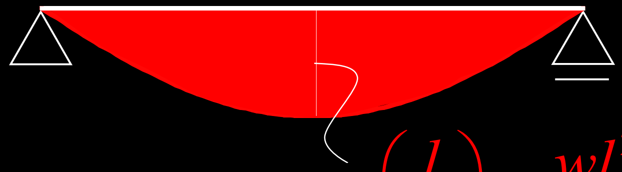
$$v(x) = \frac{wl^4}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

$$v'(x) = \frac{wl^3}{24EI}\left\{4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right\}$$

$$M(x) = -EIv''(x) = -\frac{wl^2}{2}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

$$Q(x) = -EIv'''(x) = -\frac{wl}{2}\left\{2\left(\frac{x}{l}\right) - 1\right\}$$

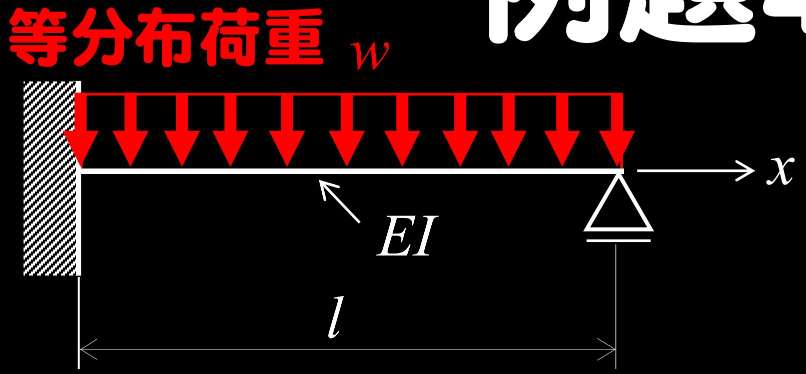
$$\begin{cases} v\left(\dfrac{l}{2}\right) = \dfrac{5wl^4}{384EI} \\ v'(0) = \dfrac{wl^3}{24EI} \\ v'(l) = -\dfrac{wl^3}{24EI} \\ M\left(\dfrac{l}{2}\right) = \dfrac{wl^2}{8} \\ Q(0) = \dfrac{wl}{2},\ Q(l) = -\dfrac{wl}{2} \end{cases}$$



$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{wl^2}{8}$$

曲げモーメント図

例題4 固定－ローラ梁



釣合い式

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x) = w$$

幾何学的境界条件

$$v(0)=0,\ v'(0)=0,\ v(l)=0$$

力学的境界条件

$$M(l)=0$$

$$\rightarrow\ -EIv''(l)=0\ \rightarrow\ v''(l)=0$$

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x) = w$$

$$EIv'''(x) = w\left(x + lC_1\right)$$

$$EIv''(x) = w\left(\frac{1}{2}x^2 + lC_1x + l^2C_2\right)$$

$$EIv'(x) = w\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}lC_1x^2 + l^2C_2x + l^3C_3\right)$$

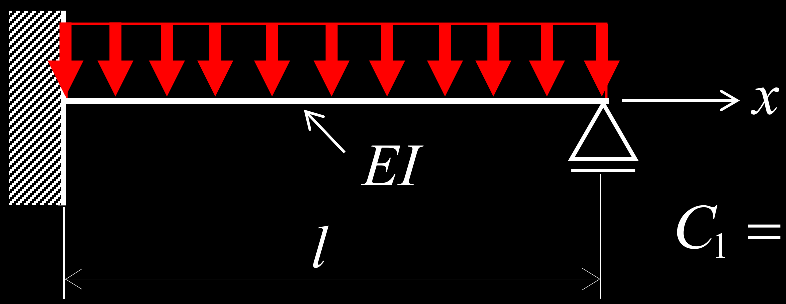
$$EIv(x) = w\left(\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}lC_1x^3 + \frac{1}{2}l^2C_2x^2 + l^3C_3x + l^4C_4\right)$$

境界条件

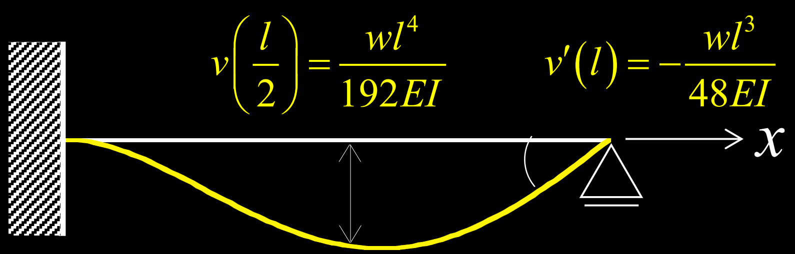
$$\begin{cases} v(0)=0 \text{ より } C_4=0 \\ v'(0)=0 \text{ より } C_3=0 \\ v(l)=0 \text{ より } \dfrac{1}{24}l^4 + \dfrac{1}{6}l^4C_1 + \dfrac{1}{2}l^4C_2 = 0 \\ v''(l)=0 \text{ より } \dfrac{1}{2}l^2 + l^2C_1 + l^2C_2 = 0 \end{cases}$$

例題4（続） 固定－ローラ梁

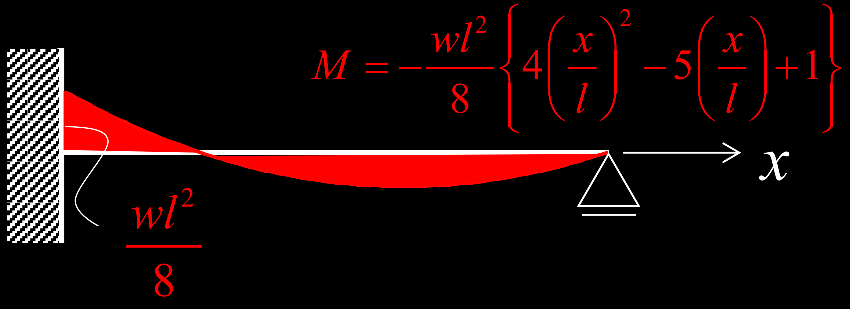
等分布荷重



$$C_1 = -\frac{5}{8}, C_2 = \frac{1}{8}, C_3 = C_4 = 0$$



たわみ



曲げモーメント図

$$v(x) = \frac{wl^4}{48EI}\left\{2\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right\}$$

$$v'(x) = \frac{wl^3}{48EI}\left\{8\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 15\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

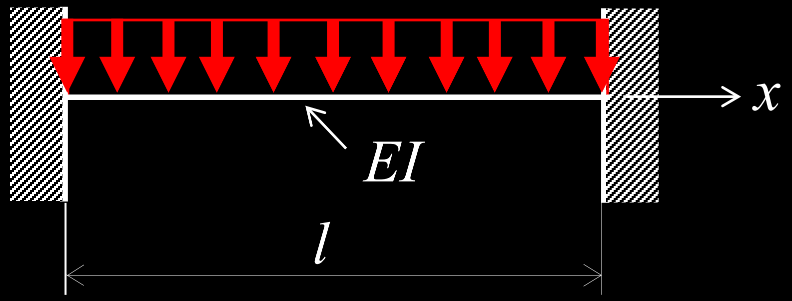
$$M(x) = -EIv''(x) = -\frac{wl^2}{8}\left\{4\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{l}\right) + 1\right\}$$

$$Q(x) = -EIv'''(x) = -\frac{wl}{8}\left\{8\left(\frac{x}{l}\right) - 5\right\}$$

$$\begin{cases} v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{wl^4}{192EI}, v'(l) = -\frac{wl^3}{48EI} \\ M(0) = -\frac{wl^2}{8} \\ Q(0) = \frac{5wl}{8}, \quad Q(l) = -\frac{3wl}{8} \end{cases}$$

例題5　両端固定梁

等分布荷重 w



釣合い式

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=w$$

幾何学的境界条件

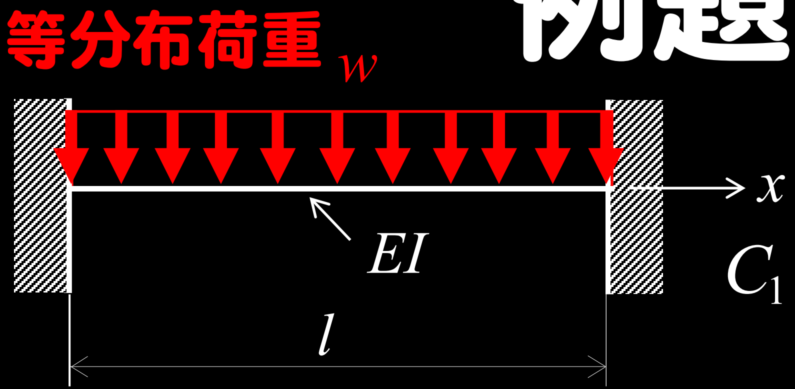
$$v(0)=0,\ v'(0)=0,$$
$$v(l)=0,\ v'(l)=0$$

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=w$$
$$EIv'''(x)=w(x+lC_1)$$
$$EIv''(x)=w\left(\frac{1}{2}x^2+lC_1x+l^2C_2\right)$$
$$EIv'(x)=w\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}lC_1x^2+l^2C_2x+l^3C_3\right)$$
$$EIv(x)=w\left(\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}lC_1x^3+\frac{1}{2}l^2C_2x^2+l^3C_3x+l^4C_4\right)$$

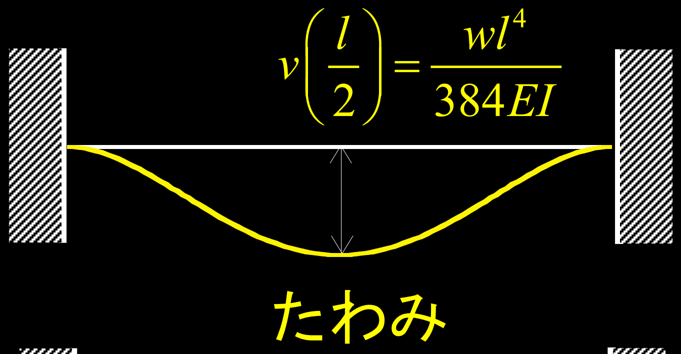
境界条件

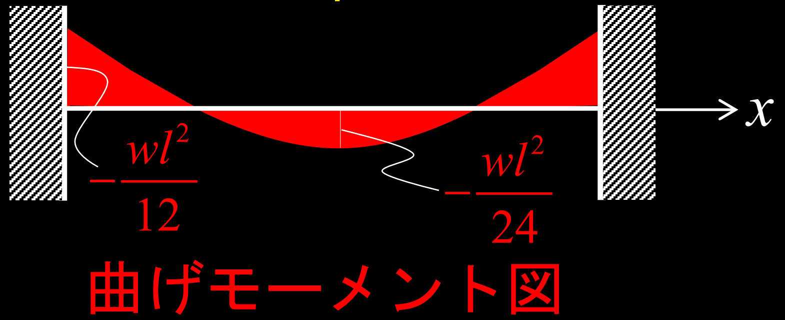
$$\begin{cases} v(0)=0 \text{　より　} C_4=0 \\ v'(0)=0 \text{　より　} C_3=0 \\ v(l)=0 \text{　より　} \dfrac{1}{24}l^4+\dfrac{1}{6}l^4C_1+\dfrac{1}{2}l^4C_2=0 \\ v'(l)=0 \text{　より　} \dfrac{1}{6}l^3+\dfrac{1}{2}l^3C_1+l^3C_2+l^3C_3=0 \end{cases}$$

例題5（続）　両端固定梁



$$C_1=-\frac{1}{2},C_2=\frac{1}{12},C_3=C_4=0$$





$$v(x)=\frac{wl^4}{24EI}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^4-2\left(\frac{x}{l}\right)^3+\left(\frac{x}{l}\right)^2\right\}$$

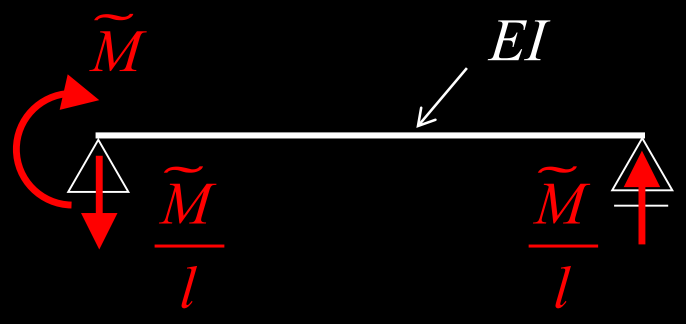
$$v'(x)=\frac{wl^3}{12EI}\left\{2\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

$$M(x)=-EIv''(x)=-\frac{wl^2}{12}\left\{6\left(\frac{x}{l}\right)^2-6\left(\frac{x}{l}\right)+1\right\}$$

$$Q(x)=-EIv'''(x)=-\frac{wl}{2}\left\{2\left(\frac{x}{l}\right)-1\right\}$$

$$\begin{cases} v\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{wl^4}{384EI} \\ M(0)=M(l)=-\frac{wl^2}{12},\quad M\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{wl^2}{24} \\ Q(0)=\frac{wl}{2},Q(l)=-\frac{wl}{2} \end{cases}$$

例題6　単純梁



$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=0$$
$$EIv'''(x)=C_1$$
$$EIv''(x)=C_1x+lC_2$$
$$EIv'(x)=\frac{1}{2}C_1x^2+lC_2x+l^2C_3$$
$$EIv(x)=\frac{1}{6}C_1x^3+\frac{1}{2}lC_2x^2+l^2C_3x+l^3C_4$$

釣合い式

$$EIv^{\mathrm{IV}}(x)=0$$

幾何学的境界条件

$$v(0)=0,\ v(l)=0$$

力学的境界条件

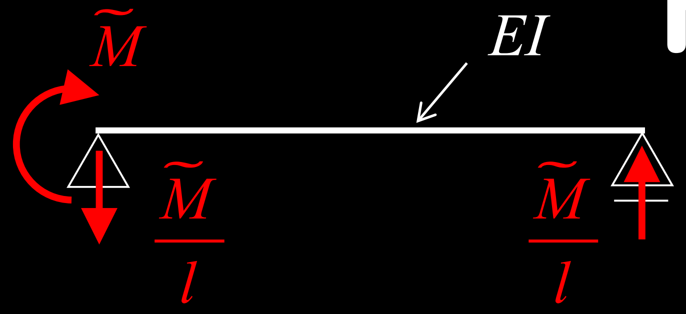
$$M(0)=\widetilde{M} \quad M(l)=0$$

$$\rightarrow \ -EIv''(0)=\widetilde{M} \quad -EIv''(l)=0$$

境界条件

$$\begin{cases} v(0)=0 & \text{より}\ C_4=0 \\ v(l)=0 & \text{より}\ \dfrac{1}{6}C_1+\dfrac{1}{2}C_2+C_3+C_4=0 \\ -EIv''(0)=\widetilde{M} & \text{より}\ -lC_2=\widetilde{M} \\ -EIv''(l)=0 & \text{より}\ C_1+C_2=0 \end{cases}$$

例題6（続） 単純梁



$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\widetilde{M}}{l}, C_2 = -\dfrac{\widetilde{M}}{l}, \\ C_3 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\widetilde{M}}{l}, C_4 = 0 \end{cases}$$

$$v(x) = \frac{\widetilde{M}l^2}{6EI}\left\{\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)\right\}$$

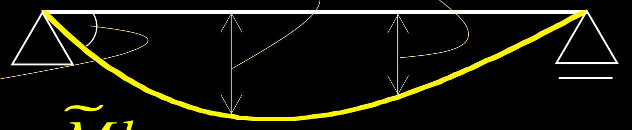
$$v'(x) = \frac{\widetilde{M}l}{6EI}\left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{l}\right) + 2\right\}$$

$$M(x) = -EIv''(x) = \widetilde{M}\left\{-\left(\frac{x}{l}\right) + 1\right\}$$

$$Q(x) = -EIv'''(x) = -\frac{\widetilde{M}}{l}$$

$$\begin{cases} v'(0) = \dfrac{\widetilde{M}l}{3EI} \\ v\left(\dfrac{l}{3}\right) = \dfrac{5\widetilde{M}l^2}{81EI} \\ v\left(\dfrac{2l}{3}\right) = \dfrac{4\widetilde{M}l^2}{81EI} \\ M(0) = \widetilde{M} \\ M(l) = 0 \end{cases}$$

$$v\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{5\widetilde{M}l^2}{81EI} \qquad v\left(\frac{2l}{3}\right) = \frac{4\widetilde{M}l^2}{81EI}$$

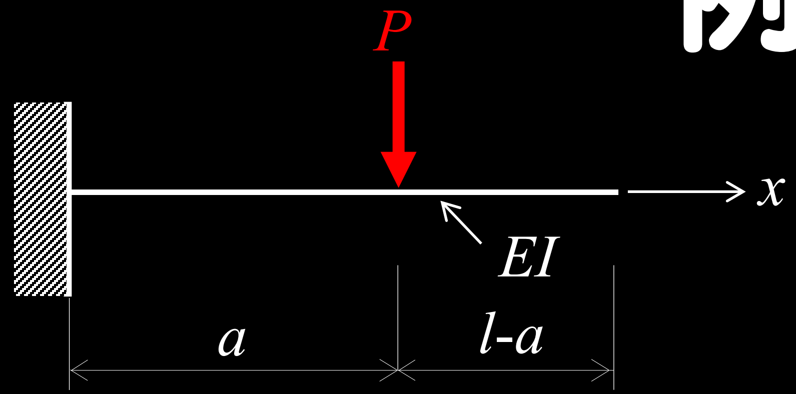


$$v'(0) = \frac{\widetilde{M}l}{3EI}$$

たわみ

曲げモーメント図

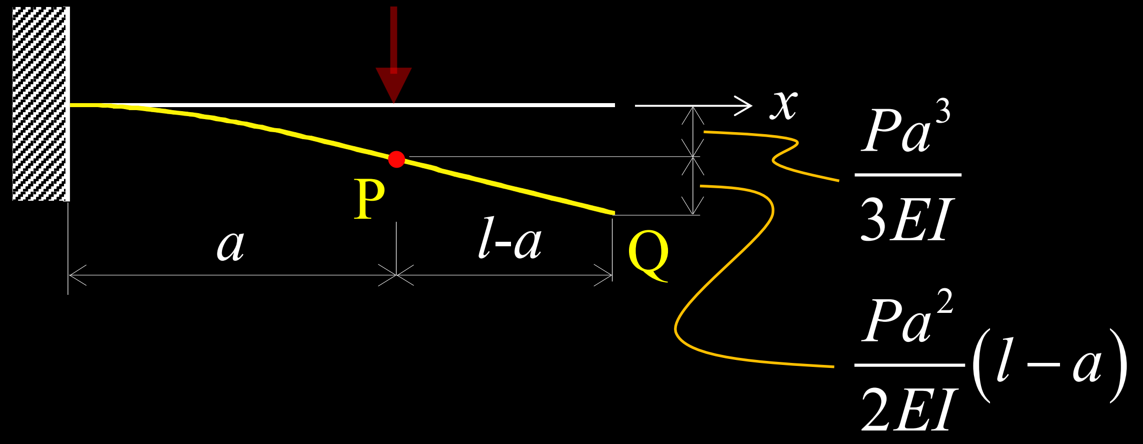
例題7 片持ち梁



$x{=}a$ に集中荷重が作用する場合

自由端のたわみ $v(l)$ は下式で計算できる。

$$v(l)=v(a)+v'(a)(l-a)=\frac{Pa^3}{3EI}+\frac{Pa^2}{2EI}(l-a)$$



例題1により，$0 \leqq x \leqq a$でたわみ v，たわみ角 v' は

$$\begin{cases} v(x)=\dfrac{Pa^3}{6EI}\left\{3\left(\dfrac{x}{a}\right)^2-\left(\dfrac{x}{a}\right)^3\right\} \\ v'(x)=\dfrac{Pa^2}{2EI}\left\{2\left(\dfrac{x}{a}\right)-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right\} \end{cases}$$

$x{=}a$でのたわみ v，たわみ角 v' は

$$v(a)=\frac{Pa^3}{3EI} \qquad v'(a)=\frac{Pa^2}{2EI}$$

$a{=}l/3$，　$a{=}2l/3$のとき，たわみ $v\,(l)$は下式となる

$$\begin{cases} a=\dfrac{l}{3}\text{のとき} & v(l)=\dfrac{4Pl^3}{81EI} \\ a=\dfrac{2l}{3}\text{のとき} & v(l)=\dfrac{14Pl^3}{81EI} \end{cases}$$

まとめ

1) 梁の問題の**基礎方程式**と**境界条件**を復習した
2) 例題1：集中荷重を受ける片持ち梁
3) 例題2：等分布荷重を受ける片持ち梁
4) 例題3：等分布荷重を受ける単純梁
5) 例題4：等分布荷重を受ける固定－ローラ梁
6) 例題5：等分布荷重を受ける両端固定梁
7) 例題6：端モーメントを受ける単純ばり
8) 例題7：x=aで集中荷重を受ける片持ち梁

次の解説について

次は

③ ダイバージェンスの定理

を解説します．

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています．

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します．

質問等の送付先は，ホームページに示しています．

2021年4月版